

Vers les limites de la connaissance scientifique

Petru Sorin BOTEZAT*

"Al. I. Cuza" University, Faculty of Mathematics,
Blvd. Carol, No. 11, Iasi 700506, Romania

E-mail Address: sorin.botezat@yahoo.com

Abrégé

Selon une opinion répandue, la raison s'oppose à la foi, et la science s'oppose à la religion. On considère pourtant qu'il s'agit d'un préjugé et on peut soutenir notre opinion par trois arguments. Tout d'abord, si on analyse les fondements de la théorie des ensembles, on trouve des arguments qui montrent que la mathématique et, en extrapolant, la raison peuvent fonctionner seulement dans un cadre où plusieurs éléments sont acceptés sans preuve. La raison ne peut construire que sur le fondement de la foi et on ne peut accorder aux concepts rationnels qu'une confiance égale à celle accordée à leurs prémisses. En deuxième lieu, en raison d'un célèbre théorème de Gödel, les mathématiciens sont obligés de croire à la légitimité de leur science, sans pouvoir en apporter de preuve. Ils ne peuvent pas non plus démontrer toutes les affirmations vraies d'une théorie. Troisièmement, les sciences naturelles utilisent des modèles mathématiques pour décrire, toujours en approximant, la réalité. Mais les modèles mathématiques sont appropriés à décrire le comportement et non la nature intime des objets naturels.

Abstract

Reason is currently opposed to faith, and science to religion. In our belief, it is a prejudice and we produce three arguments against this opinion. First, by analyzing the foundations of set theory, we get arguments that the mathematics and, by extrapolation, the reason can work only in a framework where many elements are admitted by faith. The reason can construct only on the groundwork of the faith and the rational constructs may be trusted precisely as much as their premises. Second, as a consequence of a famous theorem of Gödel, the mathematicians must *believe* in the legitimacy of their science, but they can't prove it, as they can't prove all the true assertions that can be formulated in the framework of a theory. Third, the natural sciences use mathematical models to describe, *always approximately*, the reality. But the mathematical models are appropriate to describe the behavior not the intimate nature of real objects.

Dans une certaine mentalité, assez courante, tout semble opposer la *foi* et la *raison*, la religion et la science. Dans cette équation, la pensée religieuse, reposant sur la foi, est le côté irrationnel, synonyme d'obscurantisme et d'ignorance. Du côté de la raison, la *connaissance scientifique* — et surtout la

vérité mathématique — est synonyme avec la certitude lumineuse, la connaissance infaillible, épurée de subjectivité.

Mais, en soutenant de telles opinions extrêmes, notre civilisation se trouve en désaccord avec soi. De l'avis général, c'est la mathématique qui représente le meilleur modèle de l'usage systématique et sans faille de la pensée rationnelle. Or, comme on le verra dans les lignes qui suivent, ni même la science la plus pure ne peut être bâtie sans avoir recours à l'intuition ou à la croyance. Si cela est vrai pour la science qui offre la plus grande place au raisonnement et qui, dans ses développements, refuse tout rôle à l'intuition et à l'expérience, cela est vrai aussi pour les autres sciences.

Quelles que soient leurs opinions philosophiques, les scientifiques n'ignorent pas les limites de leurs sciences. Les mathématiciens tout au moins ont fixé dès le début des limites à la raison. L'acte de distinguer ce qui est admis sans preuve de ce qui est à prouver fait partie du cœur même de la méthode mathématique, si bien que le mathématicien ne peut exercer sa science sans opérer d'abord cette distinction nécessaire. Or, l'acceptation sans preuve de la vérité de certaines affirmations est un pur acte de foi. Et l'on ne prête foi aux résultats déduits rationnellement de ces prémisses irrationnelles que si et dans la mesure où l'on prête foi à celles-ci.

Loin de s'y opposer, la *raison* s'avère n'être qu'une bonne gestion de la *foi*. Et la *foi* se montre le support indispensable sur lequel la *raison* peut construire.

Les préjugés précités ne sont que l'expression de l'ignorance d'un public loin de l'exercice de la science, mais ébloui par ses applications pratiques. Ils sont également l'expression de la quête des repères d'un monde ayant perdu les siens. Notre discours s'efforce de dissiper cette ignorance et de fournir ainsi une base pour trouver des repères plus solides qu'une opinion fragile et dépourvue de raison.

On explorera donc une région où la science rejoint la foi : les fondements des mathématiques, l'endroit où, selon la prophétie de l'Apôtre, *la science touche à sa fin* (1 Cor. 13, 8). Jetons d'abord un regard rapide sur cette science, avant d'examiner la façon dont elle est construite.

Deux visions bien distinctes

La mathématique peut être approchée de plusieurs façons. On peut la regarder soit comme un trésor des connaissances du monde environnant, soit comme science — ou plutôt art — du raisonnement.

Trésor des connaissances. Corpus des connaissances, la mathématique est une science de la nature, au même titre que la physique, la chimie et la biologie, dont elle ne s'écarte que par son objet d'étude. Traditionnellement, les mathématiques étudient les grandeurs, le nombre et les formes géométriques. Si l'on ignorait le caractère plus abstrait de ces concepts, les mathématiques passeraient facilement pour une branche de la physique.

Considérons un exemple de proposition mathématique : *Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*. Il s'agit évidemment d'une affirmation à utilité pratique immédiate dans des domaines tels que l'architecture, la cartographie ou l'astronomie.

Dans cette acception, de trésor des connaissances d'une certaine nature, la mathématique a prospéré bien avant les Grecs, chez les Babyloniens, les anciens Egyptiens, chez les Indiens ou les Chinois.

A travers les siècles son volume n'a cessé d'augmenter et elle connaît aujourd'hui un développement sans précédent. Employée comme instrument de recherche par toutes les autres sciences, à une échelle toujours plus étendue, son objet d'étude s'est enrichi sans cesse, englobant les phénomènes et les objets les plus variés.

Parmi les allégations précédentes, certaines pourraient étonner et susciter dans l'esprit du lecteur attentif des questions légitimes, dont voilà quelques unes. Qu'est-ce qui réunit en un tout des contributions si éclectiques à la connaissance du monde, en sorte qu'il soit légitime d'utiliser un nom unique — mathématique — pour les désigner ? La mathématique a-t-elle un objet privilégié d'étude ? Peut-on opérer la distinction entre les mathématiques et les autres sciences à ce niveau ou plutôt au niveau de la méthode ? Quelle est sa méthode d'étude et quelle est la fiabilité des connaissances ainsi obtenues ? Quels sont les traits spécifiques de la mathématique par rapport aux autres manifestations de la culture humaine ? La mathématique est vraiment une science ? Et finalement qu'est-ce que c'est la mathématique ?

Toutes ces questions recevraient aussitôt une réponse si l'on changeait de perspective.

Art du raisonnement. On se propose donc de regarder la mathématique autrement, non depuis l'extérieur, mais d'une perspective qui lui est propre. De ce point de vue la mathématique est l'art du raisonnement correct, où par *art* on entend l'habileté de faire quelque chose avec une précision proche de la perfection.

Dans cette acception, d'art du raisonnement, la mathématique est une invention de l'esprit grec et encore l'une des plus surprenantes et des plus caractéristiques. Sans trop exagérer, on peut affirmer qu'on ne peut être Grec sans être mathématicien, ni mathématicien sans être Grec.

Malgré l'enrichissement de son trésor de connaissances, malgré l'élargissement de ses horizons, la mathématique reste inchangée dans son essence. L'immutabilité est l'un de ses traits les plus étonnants, caractéristique de sa nature.

Langage et raisonnement

A un regard attentif, on s'aperçoit que la mathématique est à la fois *langage* et *raisonnement* formulé dans ce langage. Historiquement, ce sont d'abord les règles du raisonnement qui ont été dégagées clairement. Ce n'est qu'ensuite que les mathématiciens se sont penchés sur le langage. Dans notre discours, on observera cet ordre et on traitera d'abord du raisonnement.

La méthode axiomatique, selon les Grecs. Le cadre propre au développement du raisonnement est fourni par la méthode axiomatique. Connue et appliquée depuis l'Antiquité, elle a été amenée à la perfection à l'époque moderne. La méthode axiomatique consiste

- à considérer un petit nombre de concepts (objets et relations), dits *premiers*, comme étant connus par eux-mêmes,
- à admettre un petit nombre de propositions qui mettent en relation les concepts premiers — les *axiomes* — comme étant vraies soit par elles-mêmes, soit par le sens des concepts mis en relation,
- à définir tous les autres concepts à partir des concepts premiers
- et à démontrer toutes les autres propositions vraies à partir des axiomes, par l'application d'un petit nombre de règles logiques et sans recours à l'intuition.

Dans la méthode axiomatique une proposition est considérée vraie si l'on trouve un enchaînement d'arguments menant à elle à partir de propositions considérées vraies. Un tel enchaînement d'arguments est appelé *démonstration*. Le passage d'un chaînon à l'autre se fait selon les règles de la logique, d'une manière qui ne laisse pas de place au doute et qui puisse entraîner le consensus général. Pour garder une attitude conséquente, les premiers chaînons devraient à leur tour être démontrés, suivant une méthode semblable. Il est pourtant manifeste que cela est impossible. Sans rien savoir, on ne peut rien prouver ! Il restera toujours un résidu indémontrable. Quelques affirmations, peu nombreuses et jugées évidentes, qu'on appellera *axiomes*, seront donc postulées comme étant vraies et seront admises sans démonstration. Toutes les autres propositions seront démontrées à partir d'elles.

Les propositions mathématiques sont des affirmations qui concernent des objets. Dans la méthode axiomatique un objet doit d'abord être fixé par une définition. Mais on ne peut définir un objet qu'en faisant référence à d'autres objets, supposés connus, que l'on particularise en leur ajoutant des propriétés. Pour garder une attitude conséquente, ces objets de référence seront à leur tour définis à l'aide d'autres objets. Mais, à la fin, quelques objets resteront indéfinis. On admettra donc sans définition un petit nombre d'objets dont le sens est jugé directement accessible à l'intuition, partant digne de confiance. Ce sont les *objets premiers*. Tous les autres objets seront construits à partir d'eux.

Non seulement les objets sont introduits par une définition, mais également leurs propriétés, ainsi que les relations qu'ils établissent entre eux, autrement dit tout ce que l'on peut affirmer des objets. Pour les mêmes raisons que précédemment, on devra finalement admettre sans définition un petit nombre de propriétés attribuables à des objets et quelques relations pouvant s'établir entre ceux-ci. Elles seront appelées *relations* et *propriétés premières*.

Les axiomes mettent en relation les objets premiers par l'intermédiaire des relations premières (ou bien affirment une propriété première d'un seul objet premier).

Les objets et les relations premières sont appelés *concepts* (ou encore *termes*) *premiers*. Ils représentent les intuitions premières de l'esprit. Ce sont les briques avec lesquelles la raison construit les concepts plus complexes. La raison ne sait concevoir qu'en construisant. Sans rien connaître intuitivement, on ne peut rien concevoir rationnellement ! Toute construction rationnelle inspire une confiance égale à la confiance dans ses briques.

Les propositions sont démontrées par application d'un très petit nombre de *règles de déduction*, choisies en accord avec l'intuition logique et considérées sûres. Si l'on ne se fie pas à l'intuition logique, on ne peut raisonner ! Une succession de telles règles élémentaires crée une règle logique plus complexe, qui est autorisée à son tour à être appliquée dans les démonstrations. L'argumentation revêt ainsi un caractère formel. Elle est indépendante du sens concret des propositions impliquées.

La place de l'intuition. De cette manière, l'intuition est chassée du raisonnement et se réfugie au niveau des fondements. L'intuition garde pourtant sa place dans **la pratique** de la méthode axiomatique.

Elle est fort utile en tant qu'instrument d'orientation. L'intuition peut en effet guider le mathématicien dans un raisonnement dont le formalisme aride l'exposerait à des erreurs. Dans la pratique générale de la méthode axiomatique, l'argumentation formelle est contrôlée par les représentations intuitives, d'une nature variée, des objets y intervenant. Des indications heuristiques faisant référence à ces représentations passent parfois même dans la rédaction finale de la démonstration. Leur présence est légitime dans la mesure où elle n'est pas nécessaire à la validité de la preuve, mais est seulement utile à sa compréhension.

L'intuition est également utile en tant que puissant instrument de la découverte. Elle permet au mathématicien de se servir de son expérience, qui se traduit souvent par une connaissance informelle, mais profonde des propriétés abstraites des objets mathématiques. Elle permet de tirer des leçons de l'analogie avec ce qui se passe dans un cadre différent ou simplifié. Cet appel à l'intuition est légitime au regard de la méthode axiomatique dans la mesure où l'intuition porte

seulement sur la découverte de la démonstration, non sur la démonstration elle-même, qui apparaît dégagee des arguments informels.

L'intuition peut également servir comme moyen de démonstration. Cet emploi — général avant les Grecs — n'est pas légitime au regard de la méthode axiomatique. Chaque fois qu'il se présente, il constitue une imperfection à éliminer. Cela arrive lorsque le raisonnement informel ayant conduit le mathématicien à la découverte de la démonstration n'a pas été entièrement dégage des références à l'intuition. Un tel raisonnement ne constitue nullement une illustration de démonstration au sens de la méthode axiomatique, mais une ébauche.

Ce genre d'imperfection apparaît de temps en temps dans le travail de tout mathématicien. Pour ne faire référence qu'aux *Eléments* d'Euclide, modèle exemplaire d'utilisation systématique de la méthode axiomatique, l'utilisation du raisonnement à base de cas de figure ou des déplacements, pour prouver des égalités de figures, est apparue, à la lumière de la critique du XIX^e siècle, comme un emploi inconscient d'axiomes non formulés. En raison de ces défauts, l'héritage grec ne nous léguait aucun exemple d'application sans faille de la méthode à une théorie importante et pouvait laisser l'impression qu'un recours limité à l'intuition dans les preuves était inévitable.

Historique. La tradition s'accorde à attribuer l'élaboration de la méthode axiomatique à l'école pythagoricienne. Les textes marquant les étapes de ce processus font défaut. Elle apparaît soudain dans une forme proche de la perfection. Les œuvres d'Euclide, d'Archimède ou d'Apollonius en sont déjà des modèles d'utilisation. Elle est parfaitement comprise, largement commentée et bien expliquée par Platon ou par Aristote.

Révision de l'héritage grec. Peu de choses ont changé dès lors. Ce qui était une démonstration pour les Grecs, en est encore une pour nous. Cependant, certains progrès dans la connaissance ont obligé les mathématiciens à réviser l'héritage grec.

Ainsi, la mise en évidence d'objets mathématiques ayant des propriétés qui défient l'intuition, comme les fonctions continues nulle part dérivables ou (plus tard) les courbes continues qui remplissent un carré, a fini par compromettre définitivement le rôle de moyen de démonstration de

l'intuition. La méthode axiomatique n'en a été que renforcée.

D'autre part, la découverte des géométries non-euclidiennes par Lobatchevski et Bolyai au début du XIX^e siècle, ainsi que la construction de modèles de ces géométries exotiques dans le cadre de la géométrie euclidienne ont conduit à une meilleure compréhension du rôle joué par les idées premières dans l'architecture d'une théorie mathématique.

La méthode axiomatique, selon les modernes. Ce n'est pas la méthode axiomatique qui a dû être modifiée, mais uniquement la manière d'en envisager le point de départ.

Ainsi, les termes premiers ne sont plus regardés comme étant choisis en vertu d'un accès privilégié de l'intuition à leur sens. Ils sont des noms choisis de manière conventionnelle¹, sans contenu propre, dont le sens réside uniquement dans les relations réciproques qui s'établissent entre eux, telles qu'exprimées par les axiomes. Ils sont donnés sans définition, mais les axiomes en sont, selon la remarque de Poincaré, *des définitions déguisées*.

Les axiomes ne sont plus regardés comme admis en vertu de leur évidence, en soi ou relative aux termes mis en relation. Ils sont choisis arbitrairement et admis conventionnellement, la liberté de leur choix n'étant limitée que par la nécessité de non-contradiction.²

La vérité mathématique d'une proposition ne dépend pas de la conformité à une réalité, mais elle réside uniquement dans la déduction correcte des axiomes. Une déduction est correcte si elle observe des règles formelles, qui sont, à leur tour, admises par convention et non en vertu de leur évidence logique (de leur conformité avec le bon sens commun).

Dans l'articulation interne de la théorie, le choix des axiomes et des règles de déduction n'est donc pas imposé par une évidence, mais c'est un acte libre de foi.

¹ Les noms des termes dérivés sont aussi eux-mêmes choisis conventionnellement.

² On sait en effet, depuis l'Antiquité, que dans une théorie contradictoire on peut prouver toute proposition. Une telle théorie n'a pas de pouvoir discriminatif entre le vrai et le faux. Elle est dépourvue d'intérêt.

Cette conception surprenante et difficile à accepter concernant les idées premières a été comprise et adoptée par les grands esprits de l'époque.

Cette conception moderne de l'axiome purifie la mathématique des obscurités mystérieuses qui voilaient autrefois les fondements des mathématiques.

Cette manière de présenter les choses rend également évident le fait que les mathématiques ne peuvent rien affirmer au sujet de nos représentations intuitives, ni au sujet des réalités matérielles.

*A. Einstein*³

Argumentons et détaillons cette conception, en envisageant des exemples concrets. Montrons qu'elle est la seule possible, légitime et en accord avec les faits. Mais remarquons d'abord que la difficulté de l'admettre procède de la confusion courante entre la théorie et ses représentations intuitives ou matérielles.

Interprétations. Abstraction. La méthode scientifique. Avant l'avènement des géométries non-euclidiennes, on n'avait souvent connaissance d'une théorie mathématique qu'à travers l'une de ses interprétations possibles, avec laquelle on avait l'habitude de la confondre. En découvrant la multiplicité des interprétations (ou modèles) de la géométrie, on a pris conscience du fait qu'il fallait séparer la part qui revenait à une théorie mathématique de la part qui revenait à ses interprétations.

Les interprétations d'une théorie T sont de deux types différents.

On trouve une interprétation ou un modèle d'une théorie mathématique T dans une autre théorie mathématique T' lorsqu'on peut identifier les termes premiers de T avec des termes (premiers ou dérivés) de T' , lorsque les axiomes de T sont des propositions vraies (axiomes ou théorèmes) de T' et lorsque les règles de déduction de T sont des règles de déduction (premières ou dérivées) de T' . En ce cas, aux identifications précédentes près, tous les théorèmes de T sont des théorèmes de T' .

On trouve une interprétation de T dans la réalité si l'on peut identifier les termes premiers de T avec des objets du

³ apud A. Dumitriu, *Logica polivalentă (La logique polyvalente)*, p. 29

monde sensible ou intelligible et si les axiomes de T semblent reproduire raisonnablement le comportement observé de ces objets. Cette démarche appartient aux sciences de la nature dans leur effort de modéliser la réalité. C'est de cette manière qu'elles se servent de la mathématique comme d'un instrument de connaissance. Dans ce cas, les axiomes deviennent des hypothèses qui doivent être validées de manière expérimentale, en tant que décrivant de manière adéquate un fragment de la réalité. Si la théorie est validée, ses théorèmes mesurent et anticipent les comportements des objets de la réalité modélisée. Mais il s'agit là d'un problème extérieur à la mathématique, dans la mesure où une théorie invalidée expérimentalement, en tant que modèle d'une réalité, n'en est aucunement disqualifiée en tant que théorie mathématique, vraie en soi et par elle-même. Inversement, si la théorie est validée, le constat expérimental d'une propriété ne saurait se substituer à sa démonstration formelle, mais pourrait tout au plus donner au mathématicien l'impulsion de la chercher.

L'étude de la méthode scientifique excède l'objet de notre discussion, mais notons cependant que la nature ne se conforme que partiellement à une théorie mathématique : à une certaine échelle, à un certain niveau de réalité, avec un certain degré d'approximation ... Et on ne peut avoir confiance dans les connaissances scientifiques qu'à cette conformité partielle près.

D'une manière générale, toute théorie mathématique admet des interprétations multiples, tant physiques que théoriques, et il n'y a pas d'interprétation privilégiée. Les mathématiciens peuvent en considérer une ou plusieurs, tout comme ils peuvent en faire abstraction. De toute façon, le problème d'en trouver ou d'en choisir une reste extérieur à la théorie, qui progresse par le raisonnement, indépendamment de ses interprétations. Les suggestions en provenance des interprétations jouent, dans la dynamique d'une théorie, un rôle purement heuristique.

La possibilité d'appliquer une théorie mathématique à la description d'une réalité, théorique ou sensible, très différente de celle qui l'a motivée s'explique par son caractère *abstrait*. Elle ne retient dans ses axiomes qu'une partie de l'immanence des objets réels, à la façon d'un croquis qui re-

tient la forme, mais ignore la couleur. Comme le croquis, qui peut recevoir les couleurs les plus inattendues, la théorie peut revêtir les habits les plus surprenants. La théorie est une forme vide qui se remplit du contenu de son interprétation. Ce n'est qu'un squelette logique et abstrait, immanent dans une ou plusieurs réalités matérielles, mais n'épuisant pas la richesse de leur contenu.

Un exemple. Soit d une droite et soit σ l'un des deux demi-plans ouverts limités par d . Appelant *plan* le demi-plan σ et appelant *droites* les demi-cercles centrés sur d et contenus dans σ , ainsi que les demi-droites orthogonales et ayant l'origine sur d , contenues dans σ , on peut montrer que tous les axiomes de la géométrie euclidienne plane sont vérifiés, à l'exception de l'axiome des parallèles⁴, qui est faux.

Les axiomes. On a ainsi construit, à l'intérieur de la géométrie euclidienne, un modèle de la géométrie de Lobatchevski-Bolyai. En d'autres termes, on a construit, à l'aide de l'axiome des parallèles, une géométrie dans laquelle l'axiome des parallèles est faux.⁵ Si la géométrie de Lobatchevski-Bolyai était contradictoire, son modèle engendrerait une contradiction au sein de la géométrie euclidienne, qui serait contradictoire à son tour, ce qui n'est probablement pas vrai. Ceci montre que tant l'axiome des parallèles que sa négation sont compatibles avec les autres axiomes de la géométrie (ajoutés l'un ou l'autre à l'ensemble des autres

⁴ L'axiome des parallèles affirme que *par un point qui n'est pas situé sur une droite il passe une droite tout au plus qui ne la rencontre pas*. La géométrie qui admet cet axiome est dite euclidienne. Dans la géométrie de Lobatchevski et de Bolyai, c'est la négation de cet axiome qui est supposée vraie, qui affirme que *par un point qui n'est pas sur une droite, il passe au moins deux droites qui ne la rencontrent pas*.

⁵ On n'aboutit pas de cette façon à une contradiction, car l'assertion qui joue, à l'intérieur du modèle, le rôle de la négation de l'axiome des parallèles le fait à travers une interprétation des termes différente de celle qui fonctionne dans la géométrie euclidienne ambiante. Dans la géométrie ambiante cette assertion est un théorème qui ne coïncide pas avec la négation de l'axiome des parallèles. Il affirme en gros que *par un point qui n'est pas situé sur un demi-cercle délimité par (ou sur une demi-droite orthogonale sur et délimitée par) une droite d , mais qui se trouve du même côté de la droite, il passe au moins deux demi-cercles délimités par la même droite d et qui ne rencontrent pas le demi-cercle initial*.

axiomes, on obtient des théories non-contradictoires) ou — ce qui est équivalent — que l'axiome des parallèles est indépendant des autres axiomes de la géométrie (ni lui, ni sa négation ne peuvent en être déduits). Il s'en suit que, tant qu'on n'a pas en vue une interprétation particulière, la géométrie de Lobatchevski-Bolyai est aussi légitime que la géométrie euclidienne. En d'autres termes, la négation et l'affirmation de l'axiome des parallèles sont aussi légitimes l'une que l'autre. Le choix dans un sens ou dans l'autre n'est qu'une option personnelle du mathématicien. L'axiome des parallèles n'est évident ni en soi, ni par les termes qu'il agence. Il n'est pas évident du tout ! Il est simplement choisi par convention. Il est préféré uniquement parce qu'il correspond, à l'échelle de notre vie quotidienne, aux données de la réalité physique. Mais, dès que l'intérêt du mathématicien change et qu'une interprétation différente de la géométrie est visée, son choix pourrait se porter aussi bien sur sa négation.

Les objets mathématiques. Le fait qu'il peut être parfaitement légitime de nommer droite un demi-cercle pose avec acuité le problème de la nature des objets mathématiques. Le sens concret des termes d'une théorie mathématique peut-il varier avec l'interprétation de cette théorie ? La réponse semble être affirmative. Qu'est-ce qu'une droite ? La réponse semble dépendre de l'interprétation que l'on donne à la géométrie. Il serait pourtant inacceptable de dire que le sens des termes ou des propositions d'une théorie mathématique dépend de l'interprétation choisie. En raison même de la multiplicité des interprétations, on doit admettre que le sens n'est pas celui donné par une interprétation particulière, mais plutôt quelque chose de plus abstrait qui se retrouve sans changement dans toute interprétation. Or, le peu qui reste commun aux différentes interprétations que l'on peut attribuer à une théorie se réduit aux relations abstraites qui s'établissent entre ses termes, telles qu'exprimées dans les propositions vraies de celle-ci. Le sens abstrait des termes premiers d'une théorie⁶ est donc donné par les propriétés

⁶ De la même façon, le sens des termes d'une théorie est donné par les propositions vraies que ceux-ci vérifient. Mais bien qu'il soit légitime d'étendre cette discussion à tous les termes d'une théorie, ainsi qu'à toutes les propositions de celle-ci, il convient de la restreindre, pour des raisons

exprimées par les axiomes que ceux-ci vérifient.

En dehors de ce sens abstrait et en quelque sorte extérieur, réduit aux relations réciproques, et tant qu'on n'a pas en vue une interprétation particulière de la théorie, les termes premiers sont vides de contenu propre. Ce vide se remplit de sens lorsque la théorie est interprétée. Mais ce sens supplémentaire, riche et concret que les termes reçoivent leur reste comme étranger; il appartient à l'interprétation et change d'une interprétation à l'autre.

Le sens des termes premiers ne dépend pas du nom qui leur est attribué. Il est vrai que dans la pratique des mathématiques le nom fait souvent référence à une interprétation particulière de la théorie, offrant ainsi un repère à l'intuition du mathématicien. Mais en réalité le nom sert seulement à distinguer le terme nommé des autres termes et à s'y référer dans les propositions. Il a un caractère conventionnel et peut être modifié sans causer de dommage à la théorie considérée.

Selon une anecdote, Hilbert illustre cette idée en disant qu'on pouvait remplacer les mots *plan*, *droite* et *point* par *table*, *chaise* et *verre à bière* sans rien changer à la géométrie.⁷

On s'attendrait de la part d'objets de consistance si diaphane et subtile à plus d'évanescence. Mais, malgré leur nature purement intellectuelle, ils s'imposent aussi implacablement que les objets de la réalité physique. Le mathématicien ne fait que les découvrir; il ne les invente pas. Une fois les idées premières (termes, axiomes, règles de déduction) de la théorie posées, on a créé un univers. Les vérités mathématiques découlent nécessairement des axiomes, indépendamment de (et malgré) la volonté du mathématicien. Elles ne se soumettent pas à ses caprices et ne sont aucunement le fruit de ses fantaisies. Souvent elles se dérobent à ses efforts de découverte et lui opposent la même résistance que les phénomènes du monde matériel.

Je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas

d'économie, aux seuls termes premiers, ainsi qu'aux axiomes, car on connaît parfaitement le rapport qui s'établit entre les termes premiers et les termes dérivés ou entre les axiomes et les propositions dérivées.

⁷ cf. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Théorie des ensembles, chap. 4, p. 91

le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous, avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et nous les rencontrons ou les découvrons, et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes.

Hermite⁸

Jalons dans l'histoire. Historiquement, l'abandon de tout recours à l'intuition dans le cadre du raisonnement géométrique et la correction des imperfections du système axiomatique d'Euclide — autrement dit l'application conséquente de la méthode axiomatique — devient le programme, exprimé clairement, de plusieurs mathématiciens de la fin du XIX^e siècle, dont on citera Pasch et Hilbert. Dans son livre *Grundlagen der Geometrie* (1899), Hilbert formule le premier système complet d'axiomes pour la géométrie euclidienne. De plus, il étudie séparément les conséquences logiques des divers groupes d'axiomes, ainsi que les diverses géométries exotiques qui apparaissent lorsque certains axiomes sont supprimés ou modifiés. Cet ouvrage a contribué plus que tout autre à la compréhension par les mathématiciens de la nature exacte de la méthode axiomatique : du caractère conventionnel des axiomes, de la liberté dont jouit le mathématicien dans le choix de ses postulats, du fait que la vérité mathématique ne réside pas dans la conformité à une réalité modèle, mais dans la déduction correcte d'axiomes choisis arbitrairement.

A la fin du XIX^e siècle, les mathématiques ont pu être unifiées dans le cadre de la théorie des ensembles, créée par le mathématicien allemand G. Cantor, mais l'apparition de paradoxes au sein de cette théorie menaçait de nullité des branches entières de la mathématique.

Dans la théorie cantorienne des ensembles, pour toute propriété $P(x)$ attribuable à un objet x on peut considérer l'ensemble M de tous les objets ayant cette propriété. Alors, pour x quelconque, les propositions $P(x)$ et $x \in M$ sont équivalentes (disent la même chose).

Un exemple de paradoxe est celui de l'ensemble M de tous les ensembles qui ne se contiennent pas comme éléments, autrement dit de l'ensemble des x ayant la propriété $x \notin x$. En vertu de ce qui vient d'être dit, les propositions $x \notin x$ et $x \in M$ sont équivalentes pour tout x . En particulier, pour M à la place de x , on obtient l'équivalence des propositions $M \notin M$ et $M \in M$ ou, ce qui revient au même, le fait intuiti-

⁸ apud N. Bourbaki, *ibidem*, p. 88

vement absurde que M se contient comme élément si et seulement s'il ne se contient pas comme élément. On a ainsi obtenu une contradiction, car la négation de l'équivalence est une proposition vraie en vertu du principe de la non-contradiction.

L'une des solutions à cette crise a été l'axiomatisation complète de la théorie des ensembles. Les bases axiomatiques sur lesquelles allait être assise la théorie devaient être assez restrictives pour ne pas permettre la construction formelle d'ensembles trop grands, à propriétés paradoxales, mais en même temps suffisamment souples pour permettre la construction de tous les ensembles utilisés dans les mathématiques usuelles. La première axiomatisation de la théorie des ensembles a été donnée par Zermelo en 1908.

Formalisation. Il est très vite apparu que l'axiomatisation — en langage naturel — ne protégeait pas, à elle seule, le système des paradoxes de langage (dont le plus connu est celui de Richard).

Voilà une version de ce paradoxe. Soit x le plus petit nombre qu'on ne peut définir avec moins de quinze mots. Or, la proposition précédente définit x avec quatorze mots seulement.

Pour éliminer le risque de contradiction, les axiomes allaient être écrits dans un langage artificiel symbolique, admettant seulement quelques modalités simples et bien précisées d'expression. Ce langage, dit *formel*, devait permettre le déploiement de tout l'appareil déductif de la théorie. C'est pourquoi la présentation d'un système entièrement formalisé de la théorie des ensembles devait inclure la logique.

Ce dessein a été accompli en 1922 par Fraenkel et Skolem, qui ont formalisé le système de Zermelo. Plus tard, en étapes successives, von Neumann, Bernays et Gödel ont proposé une description axiomatique complètement formalisée alternative de la théorie des ensembles (NBG), beaucoup moins restrictive que celle de Zermelo, Skolem et Fraenkel (ZSF).

L'utilisation du symbolisme n'était pas nouvelle en mathématiques. Pensons, en effet, aux notations algébriques ou bien aux symboles abrégiateurs qu'introduisent les définitions. Un symbole abrégiateur bien choisi concentre des

opérations mentales complexes qui, une fois connues et étudiées, n'ont plus besoin d'être détaillées chaque fois qu'elles interviennent dans un raisonnement. La concision ainsi acquise rend transparente la structure du raisonnement, qui devient facile à suivre ou à conduire là où l'absence d'une notation symbolique le rendrait pratiquement impossible.

Mais l'emploi d'un langage formel représentait quelque chose de plus radical. Il s'agissait de renoncer définitivement au langage naturel (au moins à un niveau théorique⁹) et d'utiliser à sa place un symbolisme adapté aux exigences de rigueur et de précision du raisonnement. Dans un langage formel les notions de terme, propriété, relation ou proposition perdent leur signification usuelle et deviennent des appellations pour certains types d'assemblages de signes. La théorie devient un jeu de signes vides de contenu. Le contenu des signes — extérieur aux signes mêmes — se réduit aux restrictions combinatoires qui leur sont imposées par le jeu¹⁰. Dans la vision de David Hilbert, on a là l'essence même de la mathématique, chose qu'il a osé exprimer, en paraphrasant l'Évangile (et Goethe), par la formule concentrée suivante : *Am Anfang, so heisst es hier, ist das Zeichen.*¹¹

Les règles syntaxiques du langage formel doivent être formulées à leur tour dans un langage, capable de décrire les manipulations de suites finies de signes écrits sur papier (*finite Prozesse*). On ne peut rien formuler sans disposer d'un langage ! Ce langage, moins riche, devrait être formalisé à son tour, mais ce genre de formalisation ne semble pas pouvoir être poussée davantage. La construction du langage formel — et, par extrapolation, l'existence de la pensée discursive et la possibilité de la raison — reposent donc sur l'intuition

⁹ L'utilisation exclusive du langage formel conduirait à des difficultés de lecture ou d'écriture insurmontables. Aussi faut-il recourir à un compromis entre le langage naturel et le langage symbolique. Mais, même lorsque les mathématiciens se servent d'un simulacre de langage naturel, ils le font dans la mesure où ils savent que tout ce qu'ils disent *pourrait* être rendu en langage formel.

¹⁰ Si bien des mathématiciens ont des réserves au sujet du caractère ludique des mathématiques, c'est uniquement parce que la mathématique n'a pas la gratuité du jeu. On ne conteste ainsi que les connotations dérisoires du mot *jeu*.

¹¹ apud A. Dumitriu, *ibidem*, p. 33

première des suites finies de signes ! C'est peu de chose, on pourrait dire. Mais pour décrire le même genre d'objets à sa manière, la mathématique que l'on construit ainsi doit introduire successivement les concepts de paire d'objets, de produit cartésien, de fonction qui forment son cœur même.

Le langage formel part d'un alphabet de signes. (Certains signes sont des lettres, servant à modéliser les ensembles, d'autres sont des connecteurs logiques ou des relations premières de la théorie: la relation d'appartenance, dans le cas de la théorie des ensembles. Mais ces rôles distincts leur sont conférés par les règles de formation et les axiomes.)

Les signes peuvent être écrits les uns à côté des autres pour former les *assemblages*.

Les assemblages sont *bien formés* s'ils se réduisent à une lettre ou s'ils résultent par application d'une règle de formation à d'autres assemblages bien formés, du *type* exigé par la règle. Les assemblages bien formés sont de deux types : *termes* et *relations*, servant à modéliser les objets et les propositions de la théorie; les lettres sont des termes. Une *règle de formation* est une opération ou une suite d'opérations, bien précisées et minutieusement décrites, du type suivant : enchaînement de plusieurs signes et/ou assemblages, substitution d'un signe par un assemblage partout où il apparaît, suppression d'une partie d'un assemblage etc. Il y a des règles qui produisent des termes et des règles qui produisent des relations. Les règles de formation d'une théorie sont en nombre fini.

Un *critère de formation* est une règle formelle qui, appliquée à des assemblages bien formés d'une théorie, produit d'autres assemblages bien formés. Par exemple, une succession finie et bien précisée de règles de formation constitue un critère de formation. Le rapport entre les règles et les critères de formation est similaire à celui entre les axiomes et les théorèmes.

Les *axiomes* sont des relations distinguées. Les *schémas* sont des critères de formation distingués, construits toujours comme des successions finies de règles de formation. Les *règles de déduction* sont également des critères de formation distingués, mais qui s'appliquent à des relations. Les axiomes,

les schémas et les règles de déduction sont fixés en nombre fini.

Ces éléments étant posés, une relation est vraie — on l'appelle alors théorème — si elle est un axiome, si elle résulte par application d'un schéma ou si elle résulte d'autres propositions vraies par application d'une règle de déduction. (En d'autres termes, les théorèmes sont soit postulés, soit déduits d'autres théorèmes. Les axiomes sont des relations dont on postule la vérité. Les schémas sont des critères de formation dont on postule qu'ils ne produisent que des relations vraies.)

On appelle *démonstration* une suite finie de relations, dans laquelle toute relation est un axiome, le produit d'un schéma ou bien elle est précédée dans la suite de relations dont elle est déduite par application d'une règle de déduction. Une relation est un théorème si et seulement si on peut l'entrer dans une démonstration.

Les *définitions* introduisent des symboles abrégiateurs de termes ou de relations dérivées. L'introduction de tels symboles n'est pas théoriquement indispensable. Aussi les définitions n'ont pas été entièrement formalisées.

Il est hors de notre propos de présenter ici une exposition, même très succincte, d'un système formalisé, bien que cela eût rendu plus claires les explications précédentes et nous eût permis de préciser encore davantage certaines idées. Ce sera fait à une autre occasion.

La métamathématique

La formalisation était un complément indispensable de l'axiomatisation, mais elle ouvrait en même temps d'autres perspectives.

En effet, une théorie complètement formalisée n'est plus qu'une simple succession de signes dépourvus de signification, enchaînés selon des règles précises. Par conséquent, il devient possible de l'étudier de dehors. Cette étude des propriétés formelles d'un système axiomatique complètement formalisé est appelée métamathématique. Elle a été fondée par Hilbert et développée par toute une école créée autour de lui. Même si ses résultats peuvent paraître décevants, étant surtout des résultats négatifs, ils nous ont aidés à comprendre certaines

propriétés subtiles des systèmes formels, qui en limitent le pouvoir déductif. Par extrapolation, on peut affirmer qu'on a pris conscience de certaines limites de la rationalité humaine.

Le principal problème que la métamathématique s'était proposé de résoudre était celui de la non-contradiction de la théorie des ensembles. Une théorie logique est dite contradictoire si elle permet de déduire tant P que non P. Les autres problèmes étudiés ont été ceux de l'indépendance des axiomes, de la complétude et de la décidabilité de la théorie des ensembles. Un axiome est indépendant s'il ne peut être déduit des autres. Il y a des liens étroits entre l'indépendance et la non-contradiction qu'on ne détaillera pas ici. Dans une théorie complète on peut déduire soit P, soit non P, pour toute affirmation P qui ne porte pas sur des objets arbitraires ; la théorie a un pouvoir déductif maximum. Une théorie est décidable si l'on dispose d'un algorithme qui, appliqué mécaniquement à une proposition quelconque, nous offre, après un nombre fini d'opérations, la réponse à la question de savoir si la proposition est vraie. Le calcul logique propositionnel est un exemple de théorie décidable. Pour une théorie décidable, la solution du problème de la non-contradiction est immédiate.

Kurt Gödel a montré que tout système formel assez expressif pour engendrer un modèle de l'ensemble des nombres naturels est soit incomplet, soit contradictoire. En d'autres termes, il existe des propositions dont la vérité peut être constatée par des moyens extérieurs au système, mais ne peut être déduite à l'intérieur de celui-ci, à moins qu'il ne soit contradictoire. Voilà donc le mathématicien contraint d'admettre que la pensée rationnelle, même sans dépasser le cadre qui lui est propre, peut formuler des vérités qui dépassent la raison.

On esquissera dans les lignes suivantes la démarche du grand mathématicien, car on a observé que l'ignorance de son contenu exact donne souvent occasion à des spéculations mystiques et métaphysiques qui n'y trouvent pas leur fondement. La démonstration rigoureuse dépasserait largement les limites qu'on s'est données, mais ses idées principales peuvent être exposées le long d'une page.

En utilisant une méthode ingénieuse de **codage** numérique des assemblages et des démonstrations, Gödel réussit à **convertir** la proposition métamathématique suivante concernant le système : *la suite de formules D est une démonstration de la proposition P(m)* dans une affirmation Q concernant les nombres naturels qui est une proposition du système axiomatique.

Codage. On associe aux n signes de l'alphabet de la théorie les nombres naturels de 1 à n. Notant par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$ la suite infinie des nombres premiers, on associe à un assemblage A de k signes, de codes respectifs $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$, le code $g(A) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$. A une suite d'assemblages (et en particulier à une démonstration) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_l$ on associe le code $h(A) = x_1^{g(A_1)} \cdot x_2^{g(A_2)} \dots x_l^{g(A_l)}$. Il est facile de voir que ce codage est sans ambiguïté : un nombre naturel étant donné, il y a au plus un assemblage (et au plus une démonstration) lui correspondant, que l'on retrouve par un procédé mécanique.

Conversion de la proposition. Gödel construit ensuite, par une méthode qu'on ne détaillera pas, une proposition dépendant de trois variables naturelles $Q(m,n,p)$ ayant

1. la propriété d'être démontrable si
 - a. $n=g(P(q))$ code une proposition $P(q)$ concernant l'entier variable q
 - b. et $p=h(D)$, code une démonstration D de la proposition $P(m)$,
2. et la propriété d'en avoir la négation démontrable si
 - a. $n=g(P(q))$ code une proposition $P(q)$ concernant l'entier variable q
 - b. et soit p ne code aucune démonstration, soit $p=h(D)$ code une démonstration D de la théorie, mais qui ne prouve pas la proposition $P(m)$.

En d'autres termes, la signification de $Q(m,n,p)$ est la suivante: *p code une démonstration du prédicat de code n, lorsqu'il est évalué en m.* et l'on sait construire, par un procédé mécanique, pour toutes les valeurs significatives des trois variables numériques, une démonstration pour celle des propositions Q et non Q qui est vraie.

Une proposition qui affirme sa propre fausseté. On observe alors que la proposition mathématique $\neg(\exists p)Q(n, n, p)$ code la proposition métamathématique *il n'existe pas de démonstration pour la proposition P(n), où n code justement le prédicat P(q)*. La proposition $\neg(\exists p)Q(n, n, p)$ est un prédicat d'une variable, soit $R(n)$, de code $m=g(R(n))$. Alors $R(m)$ code exactement la proposition métamathé-

matique la proposition $R(m)$ n'est pas démontrable. Autrement dit, dans un certain sens¹², $R(m)$ affirme sa propre fausseté.

L'argument. Si le système qui engendre les nombres naturels n'est pas contradictoire, il est maintenant facile de constater que ni $R(m)$, ni sa négation ne sont démontrables.

En vérité, si D était une démonstration de $R(m)$, alors $Q(m, m, h(D))$ serait un théorème du système, vu les propriétés générales de Q . Mais ceci entraînerait aussitôt, en vertu de la règle logique formelle de l'introduction du quantificateur existentiel, la proposition $(\exists p)Q(m, m, p)$ dont la négation est $R(m)$. Ainsi le système serait contradictoire, tant $R(m)$ que sa négation disposant d'une preuve.

Donc $R(m)$ n'est pas démontrable si le système n'est pas contradictoire. Alors, en vertu des propriétés générales de Q , la proposition $\neg Q(m, m, q)$ est un théorème du système, pour chaque nombre naturel q . Le système n'étant pas contradictoire¹³, on ne peut donc trouver de démonstration de la proposition $(\exists p)Q(m, m, p)$, qui équivaut à $\neg R(m)$.

Conclusions et observations. Gödel réussit ainsi à construire la proposition indécidable $R(m)$, dont la vérité ne peut être établie à l'intérieur du système formel, par les méthodes autorisées par celui-ci. Mais la proposition, équivalente à $(\forall p)\neg Q(m, m, p)$, est intuitivement vraie, puisqu'on dispose d'une démonstration de chaque proposition $\neg Q(m, m, q)$.

Le système formel n'a donc pas assez de puissance pour démontrer toutes les affirmations vraies qu'il peut formuler. Autrement dit, il a un pouvoir expressif supérieur à son pouvoir démonstratif. Cependant il ne s'agit pas d'un défaut accidentel qui proviendrait du nombre réduit d'axiomes utilisés. Il s'agit au contraire d'une propriété nécessaire de tout système capable d'engendrer l'ensemble des nombres naturels. Même enrichi d'autant d'axiomes qu'on veut, il a *a fortiori* la capacité d'exprimer les entiers naturels et garde ainsi son défaut.

Comment cette chose est-elle possible ? *L'infinité* de démonstrations dont on dispose, une pour chacune des propositions particulières $\neg Q(m, m, q)$, ne nous fournit pas, dans ce cas, un enchaînement *fini* d'arguments en faveur de la proposition universelle

¹² Evidemment, une proposition mathématique affirmant sa propre fausseté ne saurait être formulée dans un système formel sans le rendre contradictoire. La proposition $R(m)$ acquiert ce sens, qui lui reste comme étranger, seulement si on lui donne l'interprétation métamathématique correspondant au codage utilisé.

¹³ Le lecteur attentif remarquera que le raisonnement exige ici une propriété légèrement plus forte que la non-contradiction. Nous nous abstenons de discuter ici de tels détails.

$(\forall p)\neg Q(m, m, p)$. Les propositions démontrables du type $(\forall p)F(p)$ sont souvent démontrées par récurrence. La forme la plus simple de récurrence est un argument en deux pas :

1. on prouve d'abord $F(0)$

2. et on montre ensuite, pour un nombre naturel p quelconque, que $F(p)\rightarrow F(p+1)$.

Ce principe de démonstration fonctionne parce que la démonstration de $F(p)\rightarrow F(p+1)$ ne change pas de forme avec p . Mais, pour les affirmations indécidables, les démonstrations de $F(p)\rightarrow F(p+1)$ changent de caractère d'une manière si abrupte et inattendue lorsque p change, qu'il devient impossible de les réduire toutes à un principe unique.

S'appuyant sur ce résultat, Gödel a réussi à montrer que, pour la même catégorie de systèmes formels, la démonstration de la non-contradiction était impossible par les moyens autorisés par la métamathématique (intuitionnistes et considérés sûrs). On constate la non-contradiction de la mathématique dans sa pratique multimillénaire, mais, en vertu du théorème de Gödel, on ne peut la prouver. Voilà donc le mathématicien incapable de prouver l'utilité de sa discipline, contraint à l'admettre par un acte de foi et de bon sens !

Autres solutions à la crise déclenchée par les paradoxes

La théorie des types. Russell et Whitehead observent que les paradoxes sont des énoncés qui violent le principe du cercle vicieux, en vertu duquel un élément dont la définition implique tous les éléments d'un ensemble ne peut appartenir à cet ensemble. A partir de cette observation ils construisent un monumental échafaudage logique — la théorie des types — où des énoncés de ce genre ne peuvent être formulés. Les individus sont des objets d'ordre 0. Les propositions sur les individus sont des objets d'ordre 1. Les propositions sur des objets d'ordre 1 sont des objets d'ordre 2 et ainsi de suite. Ce système essaie d'éviter les restrictions arbitraires inhérentes aux systèmes axiomatiques ZSF et NBG. Mais il n'est pas entièrement formalisé et les efforts en direction de sa formalisation ont mené à la formulation de restrictions aussi arbitraires. De toute façon, sous ces nouveaux habits, la théorie des types devient un système complètement formalisé, de la même nature que les précédents.

L'intuitionnisme. Pour les intuitionnistes — et avant tout pour Brouwer, le mathématicien qui a reconstruit la mathématique sur des bases intuitionnistes — la pensée mathématique ne peut être exprimée par un système formel. Une démonstration n'est pas concluante en vertu de la conformité stricte à des règles formelles, mais en vertu de l'évidence immédiate de chacun de ses chaînons. La mathématique est la partie exacte de notre pensée, basée sur l'intuition première des entiers naturels. Les arguments indirects sont rejetés. Ainsi l'existence d'un objet ne peut être prouvée qu'en le construisant ; l'axiome du choix, qui viole cette condition, reste vrai seulement dans un cadre fini. Pour que la proposition P ou non P soit valide, on doit disposer d'une preuve de P ou d'une preuve de non P. Le principe du tiers exclu, tout comme d'ailleurs le raisonnement par réduction à l'absurde, sont également bannis. Lorsque le cadre fini de validité générale est excédé, il est impossible de savoir si les affirmations de ces principes sont vraies ou fausses. Dans la vision de l'école intuitionniste, la mathématique classique pêche par des extrapolations qui passent outre le contrôle de l'intuition humaine. Ainsi, les formulations générales des principes et des axiomes cités sont des extensions non permises par l'intuition de propriétés qui ne peuvent être saisies que dans un cadre fini. La mathématique classique a un caractère spéculatif. On ne peut attacher à ses théorèmes un contenu intuitif. Ils sont donc sans valeur de connaissance. Les paradoxes apparaissent en raison de ces extrapolations, mais ils ne sont qu'un symptôme d'un mal plus profond, d'une manière erronée de concevoir la mathématique.

Les règles du raisonnement intuitionniste ont été formalisées par Heyting, un élève de Brouwer. L'idéologie au parfum d'hérésie de Brouwer s'est vue réduite à une simple algèbre logique. La mathématique intuitionniste, d'une grande étrangeté, a pu donc être développée par la même méthode axiomatique, mais avec un assortiment d'axiomes logiques différent.

Conclusions. Réponses aux questions

Un paradigme universel. Il apparaît ainsi clairement que, par un effort approprié de formalisation, les deux approches alternatives de la théorie des ensembles se réduisent au même paradigme universel qui est la méthode axiomatique.

La compréhension des rouages des systèmes formels équivaut probablement à la compréhension des ressorts profonds de la pensée discursive.

Qu'est-ce qu'on peut appeler mathématique ? Toute manifestation de l'esprit qui se sert systématiquement du raisonnement, qui tend vers une rigueur parfaite appartient à la mathématique. *Tout ce qui est pensée correcte est soit mathématique, soit susceptible de mathématisation*, disait un grand mathématicien.

Quel est son objet d'étude ? La nature des objets mathématiques n'est pas tant donnée par leurs représentations concrètes, que par le fait qu'on peut établir des relations abstraites entre eux. La mathématique est finalement l'étude de ces relations. Elle n'est donc pas la science des nombres, des grandeurs et des formes, mais la science de tout système d'objets du monde réel, entre lesquels on a mis en évidence, par un effort d'abstraction, des relations qui se reproduisent régulièrement.

Quelle en est la méthode d'étude ? La mathématique est une démarche d'une grande simplicité, qui exige seulement que le discours traite d'objets fixés clairement et que les thèses, une fois les principes posés, soient fondées par le raisonnement et non affirmées avec arrogance. Au niveau le plus profond, la pratique du raisonnement se réduit à une simple algèbre logique, à l'observation stricte des règles d'un jeu de signes sans contenu.

La pratique de la mathématique est un acte d'une grande probité intellectuelle, un exercice qui exclut le verbiage et le non-sens, qui bride les excès de l'arrogance intellectuelle.

Peut-on se fier aux connaissances mathématiques ? Chaque fois qu'une erreur se produit dans un raisonnement, elle peut être facilement observée à une lecture attentive par tout mathématicien expérimenté, même sans génie. C'est pourquoi on peut investir d'une grande confiance les

connaissances mathématiques. Dans la mesure où les rigueurs de la méthode ont été observées, leur exactitude est absolue. Elles sont sans âge et immuables. On ne peut les rejeter qu'en même temps que leurs prémisses et non en soi, mais uniquement en tant que modèle inadéquat d'une réalité.

La mathématique est une science ? La mathématique n'est pas une science de la nature. Sa méthode, son objet d'étude et sa conception de la vérité diffèrent. Elle ne se sert jamais des méthodes expérimentales pour valider ses vérités, qui sont immuables et absolues, indépendantes des techniques de mesure et du progrès des connaissances. Elle a pour objet d'étude des créations de l'esprit, non des réalités matérielles. Elle est plus proche de la spéculation métaphysique. Dire que la mathématique est une science c'est faire une grande confusion. Cette confusion qui est courante est due à ce que les sciences font largement usage de la mathématique comme d'un puissant instrument de connaissance, ce qui fait que là où est la science la mathématique est omniprésente. Soit les sciences trouvent dans les théories mathématiques existantes des modèles pour leurs observations, soit des théories scientifiques constituées arrivent à maturité à la suite d'un processus de mathématisation.

La mathématisation est un processus d'approfondissement de la connaissance scientifique, par lequel certaines observations concernant le monde environnant, au début non systématiques et ayant peut-être une composante émotionnelle (accompagnées d'étonnement, de surprise ou d'émotion), s'assoient dans un système ordonné de correspondances à caractère de loi. Le système devient autosuffisant ; tout recours à l'expérience devient inutile. Par un effort supplémentaire d'approfondissement, le système peut être axiomatisé ou formalisé, révélant ainsi sa nature profonde. Voilà une citation, dont on n'a pu malheureusement retrouver la source, qui résume très bien cette évolution : *Toute théorie commence par une métaphore et finit dans une algèbre.* Voilà également les paroles de celui qui a développé la méthode axiomatique jusqu'à ses dernières conséquences :

Tout ce qui peut généralement se constituer comme objet de la pensée scientifique revient, dès qu'il franchit le seuil de la constitution de la théorie, à la méthode axiomatique et, moyennant cela, à la

mathématique. Avançant vers des strates toujours plus profondes d'axiomes, on obtient en même temps une compréhension toujours plus profonde de l'essence de la pensée scientifique et on devient conscients dans une mesure toujours plus grande de l'unité de notre connaissance. Sous les auspices de la méthode axiomatique, la mathématique semble être appelée à détenir un rôle dominant dans le cadre des sciences en général.

D. Hilbert ¹⁴

Raisonnement informel. Bien qu'elle parte souvent d'une réalité, une théorie axiomatisée est un système autonome, fermé en soi, qui, peut-être, ne parle de la réalité dont il s'est inspiré que d'une manière superficielle ou approximative. Ceci peut induire maints désavantages. C'est en ce sens qu'il faut entendre les mises en garde de certains Pères de l'Eglise contre un discours théologique trop systématisé.

Le raisonnement existe aussi dans un cadre informel, ouvert vers l'intuition. Dans un tel cadre le penseur jouit de la liberté de reprendre sans cesse dans ses raisonnements des arguments de l'intuition qu'il a du monde sensible ou intelligible. Mais, en ce cas, il ne travaille pas avec des concepts précis, ayant un contenu parfaitement délimité par un assortiment d'axiomes. Ses concepts ont un contour flou, variable et subjectif. Certaines caractéristiques des concepts se dégagent de manière diffuse des noms utilisés pour les désigner ou des contextes où ils apparaissent. Le nom du concept n'a donc pas le caractère conventionnel qu'il a dans les systèmes axiomatiques. Il peut être essentiel à la compréhension du message transmis. L'argumentation peut être voilée par la présence de certaines obscurités. Censurée sans cesse par l'intuition, elle peut refuser certaines conséquences inacceptables des idées énoncées. Dans certaines situations, où la raison saisit difficilement la réalité décrite, elle peut même se permettre de formuler des antinomies qui, malgré leur contradiction interne, peuvent avoir une réelle valeur de connaissance, réveillant dans l'esprit de l'interlocuteur un certain état propice à l'intelligence de telles réalités. Une telle pensée n'est jamais validée par sa forme même, mais toujours par son adéquation à une certaine réalité dont elle rend

¹⁴ apud A. Dumitriu, *ibidem*, p. 30

compte. Par l'usage du raisonnement, elle a des points de contact avec la mathématique, mais elle n'est pas mathématique. Elle est encore métaphore et ne deviendra peut-être jamais algèbre.

Conclusion. La mathématique s'exprime dans un langage formel qui se compose de listes de symboles, astreintes à des règles. Pour formuler ces règles, il nous faut un langage plus simple, capable d'exprimer les opérations avec les suites des symboles écrits sur papier. Ce langage ne semble pas formalisable dans un langage encore plus simple. On doit donc accepter, sans l'expliquer rationnellement, l'intuition de l'écriture.

Si l'on donne l'interprétation usuelle aux assemblages de signes produits par le langage formel, la mathématique est une démarche qui consiste en gros à admettre par la foi certaines vérités et à en dériver d'autres par le jeu mécanique des règles du raisonnement. Les résultats obtenus par dérivation jouissent alors de la même confiance que ceux qui sont admis.

En effet, ce qui est donné (admis d'une façon qui n'est pas rationnelle) est à distinguer de ce qui est dérivé de manière rationnelle, à tous les niveaux de cette construction rationnelle qu'est une théorie mathématique. Ainsi l'alphabet et les règles de formation sont donnés, tandis que les critères de formation, les termes (ce qui est conçu) et les relations (ce qui est formule) sont dérivés rationnellement. Les axiomes et schémas, ainsi que les règles de déduction sont donnés, tandis que les théorèmes et les critères déductifs sont dérivés rationnellement. Le raisonnement mathématique ne peut se priver de ce qui est donné, sans affecter de manière grave son pouvoir dérivatif. Sans un alphabet de signes il n'y a pas de langage. Sans règles de formation on ne peut rien formuler et rien concevoir rationnellement ; le langage se réduirait à des constructions atomiques. Sans rien savoir, en admettant sans démonstration des axiomes et/ou des schémas, on ne peut rien prouver ; notre connaissance serait vide. Sans aucune figure de raisonnement posée comme règle de déduction, notre connaissance serait amorphe et stérile, une simple collection d'axiomes, de faits disparates sans rapport entre eux. La raison

ne peut exister que dans un cadre où plusieurs éléments sont admis par un acte de foi.

La mathématique n'est donc qu'une façon d'organiser nos opinions et croyances dans un système hiérarchisé où certaines connaissances sont dignes de foi dans la mesure où d'autres connaissances sont acceptées. Démontrer un théorème dans une théorie mathématique revient à établir que si l'on juge dignes de confiance les axiomes de la théorie, alors le théorème démontré est également — et dans la même mesure — digne de confiance. La mathématique ne rejette pas la foi en tant que moyen de connaissance, mais s'en sert avec économie et conséquence en s'abstenant de faire une supposition qui découle logiquement de faits déjà admis, en admettant toute conséquence logique, même surprenante, de postulats qui ont paru évidents et ont été acceptés et en n'admettant jamais deux opinions qui finissent par se contredire. Le principe d'économie et de conséquence que la mathématique introduit ainsi structure l'ensemble des connaissances du domaine visé et montre les rapports de dépendance qui s'établissent entre elles. Une théorie n'est pas une collection amorphe de faits disparates, mais un système vivant où les faits établissent entre eux des rapports étroits.

La mathématique propose donc une sage gestion de la foi et de l'intuition, en affirmant leur caractère indispensable et en tempérant les excès auxquels mènerait un usage incontrôlé ou excessif, une prolifération abusive de postulats inutiles, potentiellement contradictoires et conduisant à une connaissance superficielle. Les postulats sont soumis à la dure épreuve des conséquences que l'on peut en tirer. Par cette pratique la partie cachée de leur sens se révèle et on peut mieux apprécier leur portée, ainsi que les imperfections de notre propre intuition.

La démarche mathématique a une valeur en soi seulement si elle est exempte de contradiction. La démarche mathématique est limitée si sa méthode est impuissante à prouver certaines vérités. Or, le théorème de Gödel nous oblige d'une part d'admettre par un acte de foi la non-contradiction de la mathématique et nous permet d'autre part de formuler par la raison des résultats qui dépassent les possibilités de la raison.

La mathématique est une construction de l'esprit, épurée de la grossièreté de la matière, vraie en soi et qui se suffit à elle-même. Son sens subsiste dans l'articulation de ses composants. La mathématique n'est pas connaissance d'autre chose que d'elle-même, mais connaissance en soi. C'est une discipline abstraite qui, par elle-même, n'affirme rien sur la nature. La démarche scientifique consiste à donner à une théorie mathématique une interprétation dans la réalité, dans l'effort d'expliquer celle-ci. Toute théorie mathématique n'est qu'une forme qui ne peut rendre compte de la réalité en soi, mais décrire seulement certains comportements. De plus, la validation expérimentale d'une théorie n'est jamais parfaite, de sorte qu'elle n'est qu'une approximation de la réalité visée. La méthode scientifique est une manière prudente d'approcher la réalité, mais à travers elle la réalité se révèle sans se dévoiler, gardant intacte sa transcendance.

Dans ces conditions l'image d'une science qui opposerait une raison omnisciente à la foi apparaîtrait absurde.

Bibliographie

1. BOURBAKI, Nicolas, *Éléments de mathématique*, Théorie des ensembles, Hermann, Paris, 1957
2. DUMITRIU, Anton, *Logica polivalentă (La logique polyvalente)*, Enciclopedică Publishing House, Bucharest, 1971